EEIGM
1ère Année

Discipline Mécanique

Résistance des Matériaux

TD 4 :
Détermination des efforts extérieurs

Zoubir AYADI

Exercice 1

Soit $\left(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0\right)$ un repère orthonormé direct de référence.

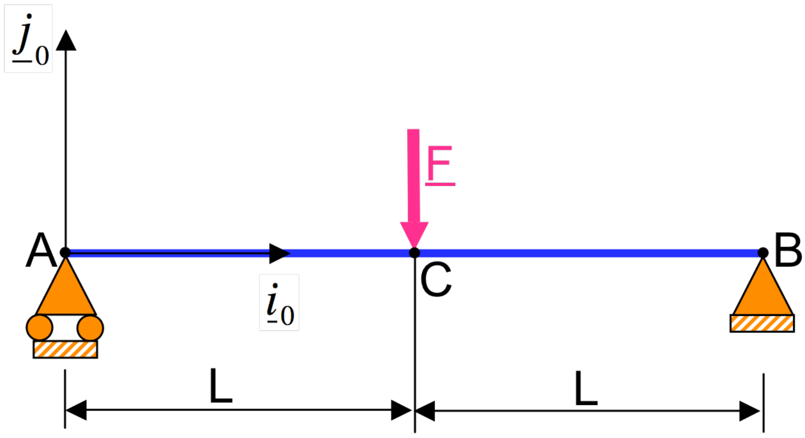
On considère une poutre de longueur 2L et de section droite de forme rectangulaire de largeur b et de hauteur h.

Cette poutre est chargée au point C avec une force concentrée et a les liaisons suivantes :

- une articulation au point B ;
- un appui simple au point A.

Pour l'application numérique, on donne :

- 2L=1m
- F=1000N



Remarque : le plan ($\underline{i}_0$, $\underline{j}_0$) est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **force concentrée** est appliqué au point C. Le torseur associé à ce chargement est :

$$\tau_C = {}_C\left\{\begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ -F \\ 0 \end{array}\right| \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \end{array}\right\}_{\left(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0\right)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_C = {}_A\left\{\begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ -F \\ 0 \end{array}\right| \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{M}(\tau_C, C) + \underline{AC} \wedge \underline{R}(\tau_C) \end{array}\right\}_{\left(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0\right)}$$

$$\tau_C = \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -LF \end{vmatrix} \end{matrix} \right\}_{C\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➢ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **appui simple au point A**

Cette liaison supprime 1 degré de liberté de translation selon $\underline{j}_0$, elle introduit donc 1 inconnue en force selon $\underline{j}_0$. Le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est le suivant :

$$\tau_A = \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{matrix} \right\}_{A\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

➢ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **articulation au point B**

Cette liaison supprime 2 degrés de liberté de translation selon $\underline{i}_0$ et $\underline{j}_0$, elle introduit donc 2 inconnues en force selon ces 2 directions. Le torseur associé à cette liaison au point de réduction B est le suivant :

$$\tau_B = \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{matrix} \right\}_{B\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Le torseur de la liaison articulation au point B s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_B = \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, A) = \underline{M}(\tau_B, B) + \underline{AB} \wedge \underline{R}(\tau_B) \end{matrix} \right\}_{A\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

$$\tau_B = \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2LY_B \end{vmatrix} \end{matrix} \right\}_{A\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

Remarque : Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\left\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\right\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \tau_B + \tau_C = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_B) + \underline{R}(\tau_C) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_B, A) + \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{0} & (2) \end{cases}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon $\underline{i}_0$ et selon $\underline{j}_0$ et 1 équation en moment selon $\underline{k}_0$). On obtient alors :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = F \\ 2LY_B - LF = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = F \\ Y_B = \dfrac{F}{2} \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = {}_A\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \end{Bmatrix}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)} \qquad \tau_B = {}_B\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \end{Bmatrix}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Application numérique :

Les réactions des liaisons :

$$\tau_A = {}_A\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{Bmatrix}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)} \text{ et } \tau_B = {}_B\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_B, B) = \underline{0} \text{ en N.m} \end{Bmatrix}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Le chargement :

$$\tau_C = {}_C\begin{Bmatrix} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \quad \text{ en N.m} \end{Bmatrix}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions des liaisons par les seules équations d'équilibre. Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

Exercice 2

Mêmes questions que pour l'exercice 1

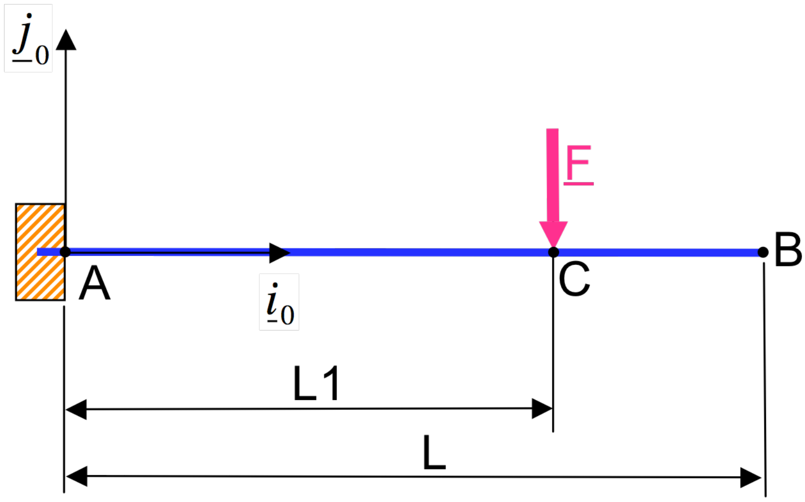
Avec une liaison encastrement au point A.

Pour l'application numérique, on donne :

L=3m

L1=2

F=2000N



Remarque : le plan ($\underline{i}_0$, $\underline{j}_0$) est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **force concentrée** est appliqué au point C. Le torseur associé à ce chargement est :

$$\tau_C = {}_C\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -F \\ 0 \end{array} \right| \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \end{array} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$\tau_C = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -F \\ 0 \end{array} \right| \\ \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{M}(\tau_C, C) + \underline{AC} \wedge \underline{R}(\tau_C) \end{array} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 F \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➢ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **encastrement au point A**
Cette liaison supprime les 6 degrés de liberté dans l'espace (les 3 translations et les 3 rotations). Elle introduit donc 6 inconnues (3 forces et 3 moments). Dans le cas d'une poutre à plan moyen chargée dans son plan, le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est:

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

Remarque : Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\left\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\right\} = \{0\}$$

$$\tau_A + \tau_C = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{R}(\tau_A) + \underline{R}(\tau_C) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \underline{M}(\tau_C, A) = \underline{0} & (2) \end{cases}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon $\underline{i}_0$ et selon $\underline{j}_0$ et 1 équation en moment selon $\underline{k}_0$). On obtient alors :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = F \\ Z_B = L_1 F \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 F \end{vmatrix} \end{array} \right\}_{A\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Application numérique :

Les réactions des liaisons :

$$\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4000 \end{vmatrix} \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{A\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Le chargement :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_C) = \begin{vmatrix} 0 \\ -2000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_C, C) = \underline{0} \quad \text{ en N.m} \end{array} \right\}_{C\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions (3 inconnues) des liaisons par les seules équations d'équilibre (3 équations scalaires). Soient : 3 équations pour 3 inconnue.

Exercice 3

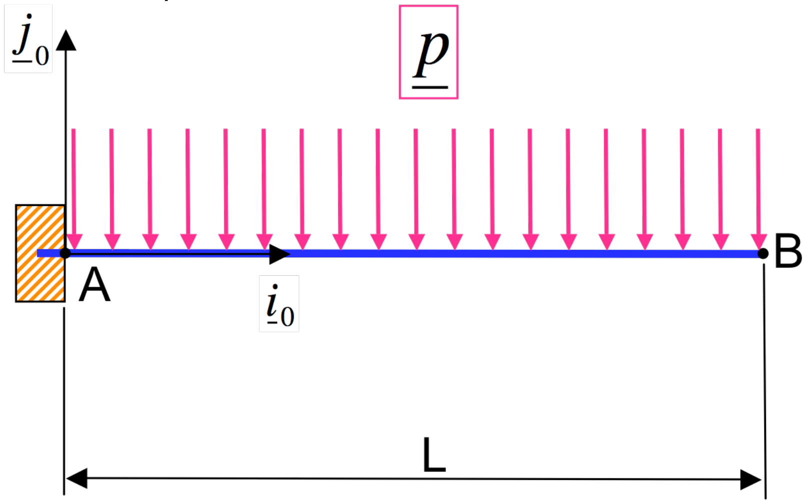
Mêmes questions que pour l'exercice 1

Pour l'application numérique, on donne :

L=2m

$\underline{p} = -1000\,\underline{j}_0$ en $N.m^{-1}$: densité linéique de charge.

Liaison encastrement au point A.

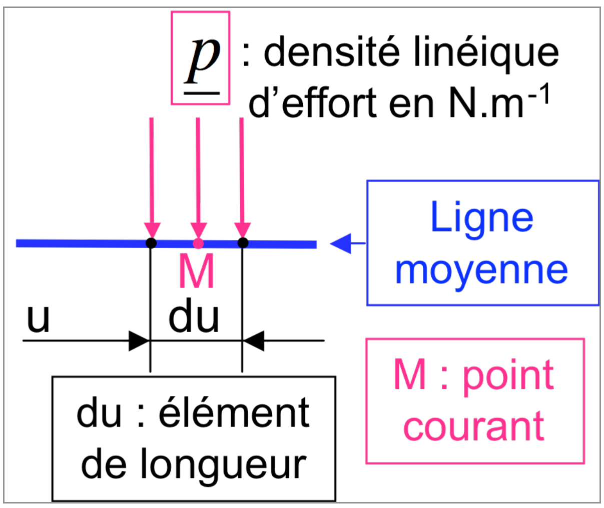


Remarque : le plan ($\underline{i}_0$, $\underline{j}_0$) est un plan de symétrie qui contient la ligne moyenne. C'est un plan moyen pour la poutre.

DETERMINATION DES EFFORTS EXTERIEURS

1. Chargement (donnée du problème)

Un seul chargement du type **réparti (ici c'est une densité linéique d'effort en N.m^{-1})** est appliqué au point courant M (voir figure ci-dessous).



Le torseur associé à ce chargement est :

$$d\tau_M = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ -p.du \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(d\tau_M, M) = \underline{0} \end{array} \right\}_{M\,(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Il est intéressant à ce stade de penser à exprimer ce torseur en un point où l'on souhaite appliquer le principe fondamental de la statique. Nous choisissons par exemple le point A. Le torseur de chargement au point C s'exprime au point de réduction A de la façon suivante :

$$d\tau_M = {}_A\left\{\begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ -p.du \\ 0 \end{array}\right| \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{M}(d\tau_M, M) + \underline{AM} \wedge \underline{R}(d\tau_M) \end{array}\right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

$$d\tau_M = {}_A\left\{\begin{array}{l} \underline{R}(d\tau_M) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ -p.du \\ 0 \end{array}\right| \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -p.u.du \end{array}\right| \end{array}\right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

2. Réactions des liaisons (inconnues du problème)

➢ Torseur des efforts extérieurs associé à la liaison **encastrement au point A**
Cette liaison supprime les 6 degrés de liberté dans l'espace (les 3 translations et les 3 rotations). Elle introduit donc 6 inconnues (3 forces et 3 moments). Dans le cas d'une poutre à plan moyen chargée dans son plan, le torseur associé à cette liaison au point de réduction A est:

$$\tau_A = {}_A\left\{\begin{array}{l} \underline{R}(\tau_A) = \left|\begin{array}{c} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{array}\right| \\ \underline{M}(\tau_A, A) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{array}\right| \end{array}\right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

3. Application du principe fondamental de la statique et détermination des réactions des liaisons

Remarque : Il faut d'abord exprimer tous les torseurs en un même point de réduction. Ce travail a été fait précédemment.

$$\{\tau_{\text{efforts extérieurs}}\} = \{0\}$$

$$\boxed{\tau_A + \int_A^B d\tau_M = \{0\}} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ll} \underline{R}(\tau_A) + \int_A^B \underline{R}(d\tau_M) = \underline{0} & (1) \\ \underline{M}(\tau_A, A) + \int_A^B \underline{M}(d\tau_M, A) = \underline{0} & (2) \end{array}\right.}$$

La projection des équations (1) et (2) selon les 3 axes du repère de référence conduit à 3 équations scalaires « utiles » (2 équations en force selon $\underline{i}_0$ et selon $\underline{j}_0$ et 1 équation en moment selon $\underline{k}_0$).

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ -p.du \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix} + \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p.u.du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= p[u]_0^L \\ Z_A &= p\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^L \end{aligned}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= pL \quad \text{; en N} \\ Z_A &= p\frac{L^2}{2} \quad \text{; en N.m} \end{aligned}}$$

Ce qui conduit à :

$$\tau_A = \left\{ \begin{aligned} \underline{R}(\tau_A) &= \begin{vmatrix} 0 \\ pL \\ 0 \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\tau_A, A) &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ p\frac{L^2}{2} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Application numérique :

La réactions de liaison encastrement :

$$\tau_A = \left\{ \begin{aligned} \underline{R}(\tau_A) &= \begin{vmatrix} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ en N} \\ \underline{M}(\tau_A, A) &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \end{vmatrix} \text{ en N.m} \end{aligned} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

Le chargement :

$$d\tau_M = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}(\tau_M) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -1000.du \\ 0 \end{array} \right| \\ \underline{M}(d\tau_M, A) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1000.u.du \end{array} \right| \end{array} \right\}_{(A;\underline{i}_0,\underline{j}_0,\underline{k}_0)}$$

4. Isostaticité extérieure

Le **système est isostatique** extérieurement car nous avons déterminé toutes les réactions (3 inconnues : deux force et un moment) des liaisons par les seules équations d'équilibre (3 équations scalaires). Soient : 3 équations pour 3 inconnue.